Formale Potenzreihen & Erzeugende Funktionen

Referenz: [Halbeisen-Skript: Kapitel 11]

Sei R ein kommutativer unitärer Ring, und sei X ein noch nicht verwendetes Symbol.

Definition: (a) Ein „formaler Ausdruck“ der Form

$$F(X) \;=\; \sum_{i\geqslant 0} a_i X^i$$

mit Koeffizienten $a_i \in R$ heisst eine *(formale) Potenzreihe in X über R.*

(b) Für je zwei Potenzreihen $F(X) = \sum_{i\geqslant 0} a_i X^i$ und $G(X) = \sum_{i\geqslant 0} b_i X^i$ setzen wir:

$$\begin{aligned}(F+G)(X) \;&:=\; F(X)+G(X) \;:=\; \sum_{i\geqslant 0} (a_i+b_i)\cdot X^i,\\ (F\cdot G)(X) \;&:=\; F(X)\cdot G(X) \;:=\; \sum_{i\geqslant 0} \Big(\textstyle\sum_{j=0}^{i} a_{i-j}b_j\Big)\cdot X^i\end{aligned}$$

Proposition-Definition: Die Menge $R[[X]]$ aller Potenzreihen in X über R mit den obigen Operationen, dem *Nullelement* $0 = \sum_{i\geqslant 0} 0\cdot X^i$ und dem *Einselement* $1 = \sum_{i\geqslant 0} \delta_{i,0}\cdot X^i$ ist ein kommutativer unitärer Ring, genannt der *Potenzreihenring in X über R.*

Konstruktion: Eine Potenzreihe $\sum_{i\geqslant 0} a_i X^i$ anzugeben ist nach Definition äquivalent dazu, ihre Koeffizienten anzugeben. Man kann den Potenzreihenring daher konkret realisieren als die Menge aller Folgen $(a_i)_{i\geqslant 0}$ in R (ohne Endlichkeitsbedingung), mit komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation sowie dem Produkt $(a_i)_i \cdot (b_i)_i := \bigl(\sum_{j=0}^{i} a_{i-j} b_j\bigr)_i$. Dabei repräsentieren die Folge $(0, 0, \ldots)$ das Nullelement, die Folge $(1, 0, 0, \ldots)$ das Einselement, und die Folge $(0, 1, 0, 0, \ldots)$ das Variablensymbol X.

Vorsicht: Eine Potenzreihe ist nur eine Formel, hat also zunächst nichts mit Konvergenz zu tun.

Bemerkung: Sind alle bis auf endliche viele Koeffizienten a_i gleich Null, so ist $\sum_{i\geqslant 0} a_i X^i$ ein *Polynom.* Die Menge aller Polynome bildet den unitären Unterring $R[X]$ von $R[[X]]$.

Vorsicht: Eine Potenzreihe, die nicht schon ein Polynom ist, kann man im Allgemeinen nicht auswerten, da der Ausdruck $\sum\limits_{i\geqslant 0} a_i x^i$ für $x \in R$ keinen Sinn ergibt. Deshalb induziert eine Potenzreihe im Allgemeinen *keine Funktion.*

Vorsicht: Selbst wenn auf R ein Begriff der Konvergenz definiert ist, und wenn eine Potenzreihe eine konvergente Funktion $R \to R$ induziert, sollte man diese Funktion nicht mit der Potenzreihe verwechseln.

Beispiel: *Geometrische Reihe:* Für jedes $a \in R$ und jedes $k \geqslant 1$ ist $1 - aX^k$ invertierbar in $R[[X]]$ mit dem Inversen

$$\sum_{i \geqslant 0} a^i X^{ki}.$$

Proposition: Eine Potenzreihe $F(X) = \sum_{i \geqslant 0} a_i X^i$ ist genau dann invertierbar in $R[[X]]$, wenn a_0 invertierbar in R ist.

Variante: Ein „formaler Ausdruck“ der Form $\sum_{i \geqslant i_0} a_i X^i$ mit Koeffizienten in einem Körper K und einem $i_0 \in \mathbb{Z}$ heisst eine *(formale) Laurentreihe mit endlichem Hauptteil über* K. Summe und Produkt von solchen ist definiert durch dieselben Formeln wie für Potenzreihen. Die Menge $K((X))$ aller solchen Laurentreihen wird damit ein Körper.

Variante: Der Ring der Potenzreihen in endlich vielen Variablen kann induktiv konstruiert werden durch

$$R[[X_1, \ldots, X_n]] \; := \; R[[X_1, \ldots, X_{n-1}]][[X_n]].$$

Definition: Für ganze Zahlen $n \geqslant k \geqslant 0$ ist der *Binomialkoeffizient* „n tief k“ definiert durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}.$$

Bedeutung: Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen.

Grundeigenschaften:

(a) Für alle $n \geqslant k \geqslant 0$ gilt $\binom{n}{k} \in \mathbb{Z}$.

(b) Für alle $n \geqslant 0$ gilt $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$.

(c) Für alle $n \geqslant k \geqslant 0$ gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(d) Für alle $n > k > 0$ gilt $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

Binomische Formel: Für alle $n \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ gilt

$$(1+X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot X^k.$$

Proposition: Für alle $m, n, k \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ gilt

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{\substack{r,s \geqslant 0 \\ r+s=k}} \binom{m}{r} \cdot \binom{n}{s}.$$

Sei jetzt R ein Ring, der $\mathbb{Q}$ als Unterring enthält.

Definition: Für jedes $a \in R$ und jede ganze Zahl $k \geqslant 0$ ist der *verallgemeinerte Binomialkoeffizient* „a tief k" definiert durch

$$\binom{a}{k} \;:=\; \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} \;\in\; R.$$

Proposition: Für alle $a, b \in R$ und alle $k \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ gilt

$$\binom{a+b}{k} \;=\; \sum_{\substack{r,s\geqslant 0\\ r+s=k}} \binom{a}{r} \cdot \binom{b}{s}.$$

Definition: Die *allgemeine Binomialreihe mit dem Exponenten* $a \in R$ ist die Potenzreihe

$$(1+X)^a \;:=\; \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} \cdot X^k \;\in\; R[[X]].$$

Proposition: Für alle $a, b \in R$ gilt

$$(1+X)^{a+b} \;=\; (1+X)^a \cdot (1+X)^b.$$

Folge: Für alle $a \in R$ gilt

$$\frac{1}{(1-X)^a} \;=\; (1-X)^{-a} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a+k-1}{k} \cdot X^k.$$

Beispiel:

$$(1-X)^{-1} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} X^k \qquad \text{und} \qquad (1-X)^{-2} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) X^k \qquad \text{und so weiter.}$$

Definition: Die formale Potenzreihe $F(X) = \sum_{i \geqslant 0} a_i X^i$ heisst auch *erzeugende Funktion* der Folge $(a_i)_i$.

Bemerkung: Eigenschaften der Folge entsprechen dann Eigenschaften der Potenzreihe. Durch Manipulation der Potenzreihe lassen sich eine Reihe solcher Eigenschaften gut beweisen.

Satz: Sei K ein Körper und $F(X) = \sum_{i \geqslant i_0} a_i X^i$ eine formale Laurentreihe in $K((X))$. Dann existieren $p, q \in K[X]$ mit $q \neq 0$ mit $F = \frac{p}{q}$ genau dann, wenn $d \geqslant 0$ und Koeffizienten $c_1, \ldots, c_d \in K$ existieren, so dass für alle $i \gg 0$ gilt

$$a_n = \sum_{i=1}^{d} c_i a_{n-i}.$$

Beispiel: Die *Fibonacci-Zahlen* sind definiert durch $F_0 := 0$ und $F_1 := 1$ und $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$ für alle $n \geqslant 2$. Damit gilt

$$F(X) \;:=\; \sum_{n \geqslant 0} F_n \cdot X^n \;=\; \frac{X}{1 - X - X^2} \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1}{1 - \alpha X} - \frac{1}{1 - \beta X} \right)$$

mit $\alpha := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\beta := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ und folglich

$$F_n \;=\; \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}.$$

Sind Zahlen a_i als Summen definiert, so lässt sich manchmal mittels ihrer erzeugenden Funktion eine geschlossene Formel herleiten.

Beispiel: Für alle ganzen Zahlen $0 \leqslant q \leqslant n$ gilt

$$\sum_{k=q}^{n} \binom{n}{k} \cdot \binom{k}{q} \quad = \quad \ldots$$

Definition: Die *formale Ableitung* von $F = \sum_{i \geqslant 0} a_i X^i$ ist definiert als

$$F' \ := \ \frac{dF}{dX} \ := \ \sum_{i \geqslant 1} a_i i X^{i-1}.$$

Grundeigenschaften:

$(f+g)'$	$=$	$f' + g'$
$(a \cdot f)'$	$=$	$a \cdot f'$
$(f \cdot g)'$	$=$	$f' \cdot g + f \cdot g'$
$\left(\frac{f}{g}\right)'$	$=$	$\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Beispiel: Für die durch

$$a_0 := 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} := \frac{a_n + \frac{1}{n!}}{n+1}$$

definierte Folge gilt

$$a_n \ = \ ...$$